

## *Lezione 2*

# Sistemi dinamici nel dominio del tempo

## Un esempio: il nastro trasportatore<sup>1</sup>

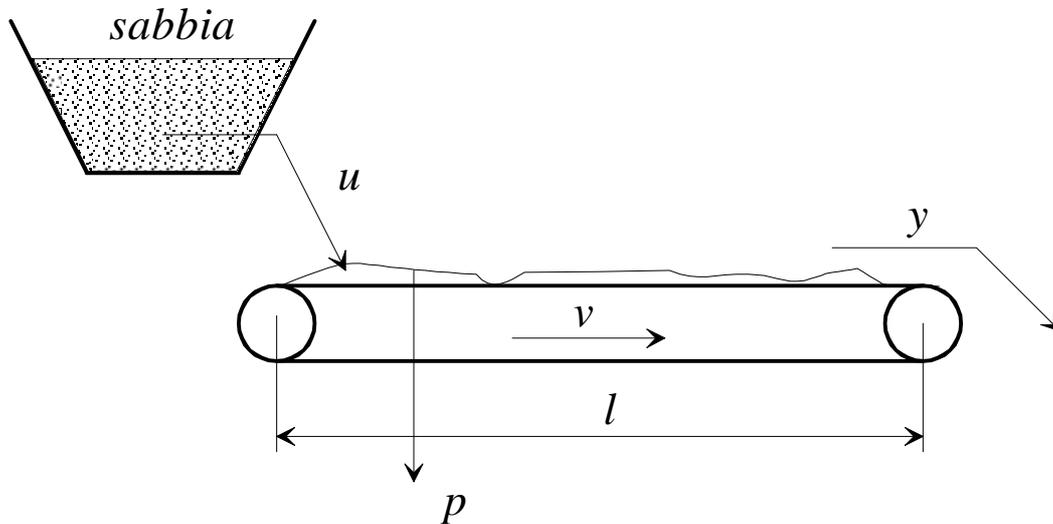


Fig. 1 : Un nastro trasportatore di sabbia

$u$ : portata di sabbia all'inizio del nastro

$y$ : portata di sabbia alla fine del nastro

$p$ : perdite di sabbia lungo il nastro

$v$ : velocità (costante) del nastro

$l$ : lunghezza del nastro

### Problema di controllo

Fare in modo che la portata  $y$  in uscita al nastro sia quanto più possibile simile ad un valore costante prefissato  $y^\circ$ , nonostante le perdite  $p$ , agendo sulla portata  $u$  di sabbia all'ingresso del nastro.

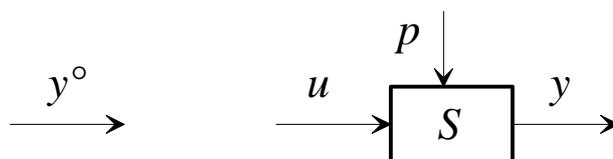


Fig. 2 : Il problema di controllo

### Modello matematico

Il modello matematico traduce in un'equazione il fatto che, ad ogni istante di tempo  $t$ , la portata in uscita uguaglia, a meno delle perdite, la portata manifestatasi in ingresso,  $\tau$  istanti prima, dove  $\tau$  è il tempo di percorrenza del nastro:

$$y(t) = u(t - \tau) - p(t), \quad \tau := l/v$$

<sup>1</sup>Da "Modellistica e Controllo", S. Bittanti, N. Schiavoni, CLUP, 1979.

Si suppone inoltre che le perdite siano calcolabili come la somma di un valore medio costante noto  $\bar{p}$  e di uno scostamento imprevedibile  $\Delta p$ :

$$p(t) = \bar{p} + \Delta p(t).$$

### **Strategia di controllo in anello aperto**

La più ovvia strategia di controllo in anello aperto consiste nell'imporre un valore di portata in ingresso costante, uguale alla somma del valore desiderato in uscita e del valore medio delle perdite:

$$u(t) = y^\circ + \bar{p}.$$

Risulta però:

$$y(t) = y^\circ + \bar{p} - (\bar{p} + \Delta p(t)) = y^\circ - \Delta p(t),$$

ossia:

$$y^\circ - y(t) = \Delta p(t).$$

Pertanto il sistema di controllo è completamente "indifeso" rispetto al disturbo  $\Delta p$  (tutto il disturbo si traduce in errore).

### **Strategia di controllo in anello chiuso**

Se la portata in uscita è misurabile, si somma alla precedente azione di controllo in anello aperto un termine correttivo, proporzionale all'errore tra valore desiderato ed effettivo di  $y$ :

$$u(t) = y^\circ + \bar{p} + \mu(y^\circ - y(t)),$$

dove  $\mu$  è un parametro di progetto.

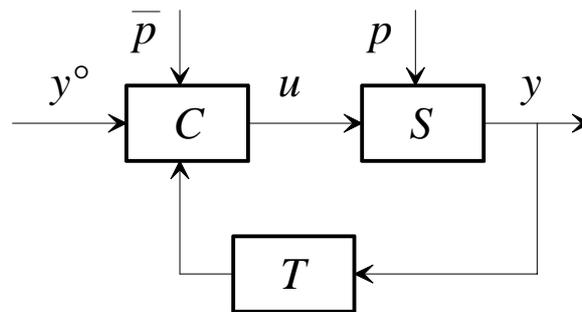


Fig. 3 : Strategia di controllo in anello chiuso

Risulta allora:

$$y(t) = y^\circ + \bar{p} + \mu(y^\circ - y(t - \tau)) - (\bar{p} + \Delta p(t)) = (1 + \mu)y^\circ - \mu y(t - \tau) - \Delta p(t).$$

Studiamo anzitutto il comportamento a regime (*analisi statica*), supponendo costanti le perdite ( $\Delta p(t) = \Delta \bar{p}$ ). Tutte le variabili risulteranno allora costanti, ed in particolare si avrà:

$$y(t) = y(t - \tau) = \bar{y}.$$

Facendo i conti si ottiene:

$$y^{\circ} - \bar{y} = \frac{\Delta \bar{p}}{1 + \mu}$$

Sembra quindi che pur di scegliere il parametro  $\mu$  positivo sufficientemente grande, si possa ridurre arbitrariamente l'errore.

Il problema è risolto? Non proprio...

Studiamo un *transitorio*, ossia il passaggio da una condizione di regime ad un'altra (*analisi dinamica*). In particolare, ipotizziamo che l'andamento nel tempo delle perdite sia rappresentato dal grafico di Fig. 4.

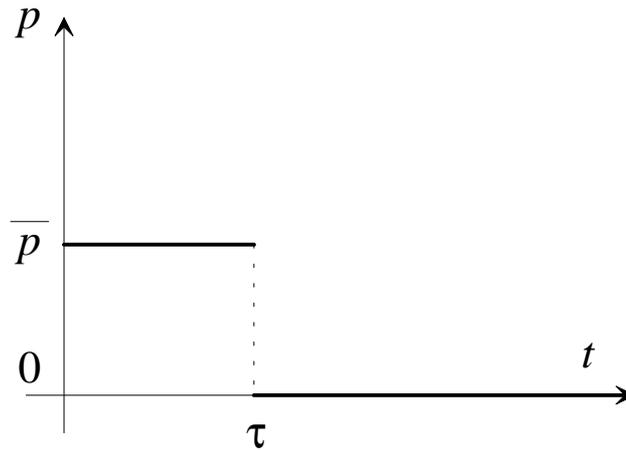


Fig. 4 : Andamento temporale delle perdite di sabbia

Facendo i conti, si trova che il parametro  $\mu$  influenza pesantemente l'andamento temporale della portata in uscita  $y$ , come mostrano i seguenti grafici:

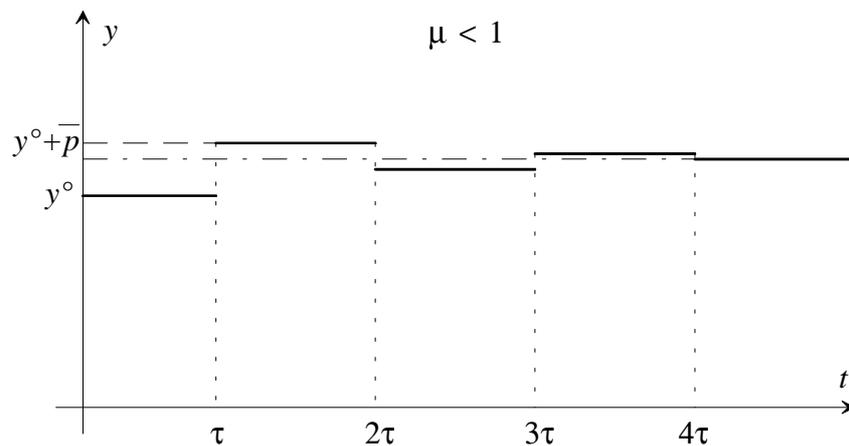


Fig. 5 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu < 1$

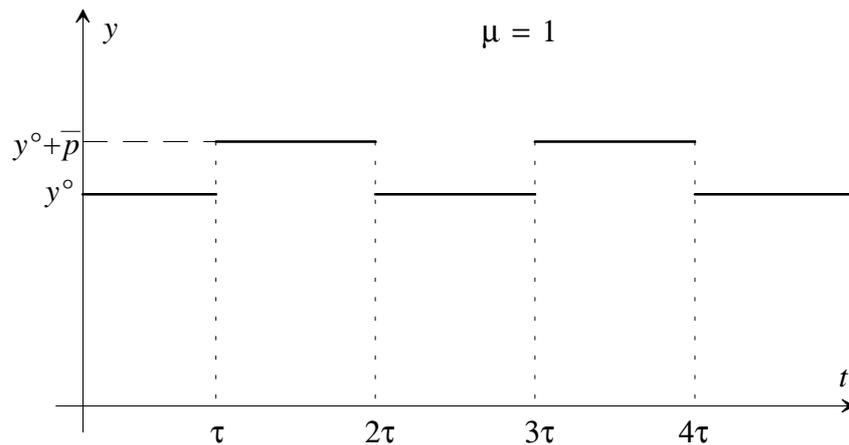


Fig. 6 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu=1$

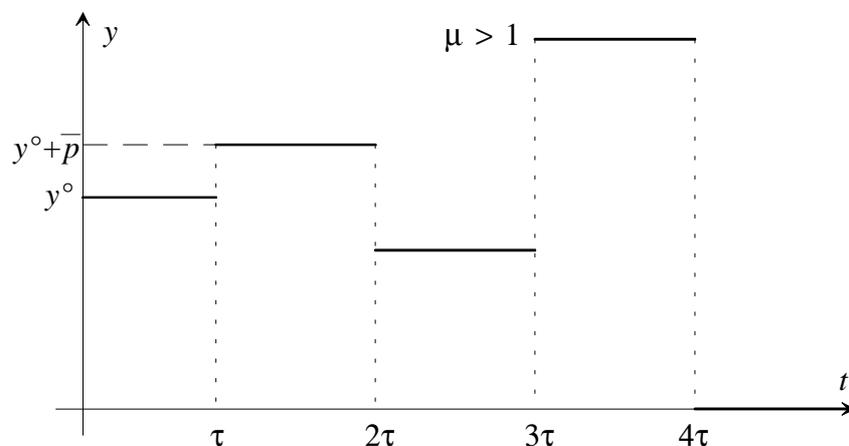


Fig. 7 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu > 1$

Tipo di transitorio	
$\mu < 1$	Oscillazioni convergenti (*)
$\mu = 1$	Oscillazioni permanenti
$\mu > 1$	Oscillazioni divergenti

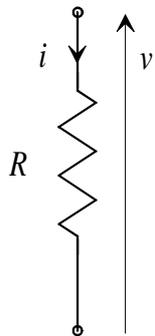
(\*) Si può dimostrare che le oscillazioni convergono al valore  $y^o + \bar{p}/(1+\mu)$ , coerente con l'analisi statica, tenendo conto che nel nuovo punto di equilibrio  $\Delta\bar{p} = -\bar{p}$ .

### Conclusioni

- L'analisi statica non è sufficiente per lo studio delle prestazioni dei sistemi di controllo. A volte (vedi i casi  $\mu=1$  e  $\mu>1$ ) può dare risultati addirittura errati.
- E' allora indispensabile un'analisi dinamica del sistema di controllo.
- Un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo delle variabili del sistema prende il nome di *modello dinamico*.
- Lo strumento matematico che useremo per formulare i modelli matematici sarà quello delle *equazioni differenziali*.

# Modelli dinamici di sistemi elementari

## Resistore



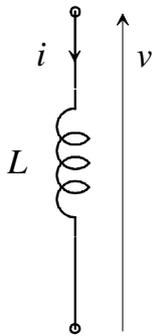
$R$ : resistenza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = Ri(t)$$

## Induttore



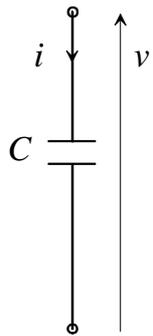
$L$ : induttanza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

## Condensatore



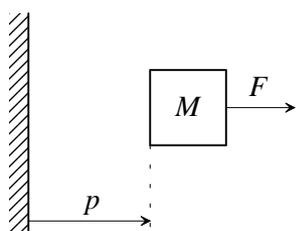
$C$ : capacità

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

## Massa



$M$ : massa

$p$ : posizione

$v$ : velocità

$a$ : accelerazione

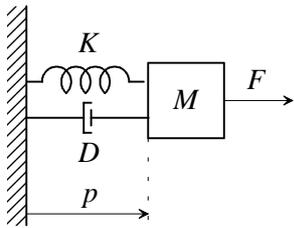
$F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Ma(t)$$

### Oscillatore meccanico



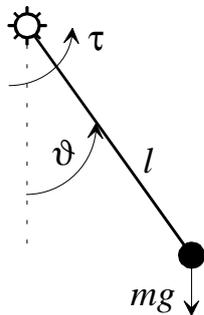
$M$ : massa  
 $K$ : costante elastica  
 $D$ : coefficiente di attrito  
 $p$ : posizione  
 $v$ : velocità  
 $a$ : accelerazione  
 $F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Kp(t) + Dv(t) + Ma(t)$$

### Pendolo



$l$ : lunghezza dell'asta (priva di massa)  
 $m$ : massa concentrata  
 $g$ : accelerazione di gravità  
 $\vartheta$ : posizione angolare  
 $\omega$ : velocità angolare  
 $\alpha$ : accelerazione angolare

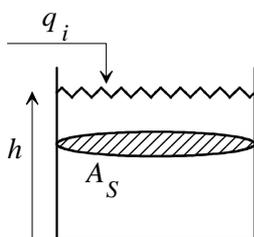
$$\omega(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\tau(t) = ml^2\alpha(t) + mgl \sin(\vartheta(t))$$

$\tau$ : coppia

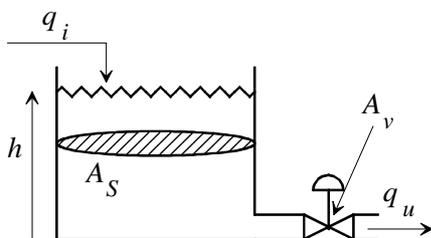
### Serbatoio cilindrico



$A_S$ : area sezione serbatoio  
 $h$ : livello liquido  
 $q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt}$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



$A_S$ : area sezione serbatoio  
 $A_v$ : area di efflusso della valvola  
 $k$ : coefficiente caratteristico della valvola  
 $h$ : livello liquido  
 $q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt} + kA_v \sqrt{h(t)}$$

## Sistemi dinamici

Un sistema dinamico si interfaccia con il “resto del mondo” per mezzo di una serie di variabili, che definiremo di ingresso, ed altre che definiremo di uscita.

Definiamo di ingresso le variabili che influenzano il comportamento del sistema, di uscita quelle che caratterizzano il sistema e sulle quali soffermiamo il nostro interesse (tipicamente perché costituiscono l’obiettivo del controllo).

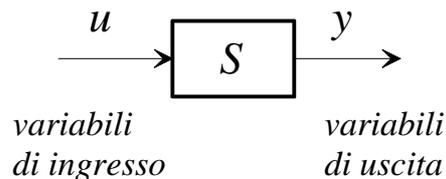


Fig. 8 : Ingressi e uscite di un sistema

La relazione che sussiste tra variabili di ingresso e di uscita è di causa-effetto e non ha nulla a che vedere con relazioni di afflusso ed efflusso di materia o energia (la portata di uscita in un serbatoio può essere variabile di ingresso per il sistema, se per esempio è comandata da una pompa).

E' sufficiente descrivere il comportamento dinamico di un sistema mediante relazioni algebriche tra i suoi ingressi e le sue uscite? Quasi sempre no (nei nostri esempi, solo per il resistore), per due motivi: occorre conoscere i valori assunti dalle variabili di ingresso a partire dall'istante iniziale ed occorre conoscere una o più condizioni iniziali.

Consideriamo a titolo di esempio il condensatore, in cui l'ingresso è costituito dalla corrente ( $u(t) = i(t)$ ), l'uscita dalla tensione ( $y(t) = v(t)$ ). Avremo quindi:

$$C\dot{y}(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

Occorre quindi conoscere il valore iniziale della tensione e l'andamento della corrente dall'istante iniziale. Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di *ordine* del sistema: lo indicheremo con  $n$ .

Per descrivere l'evoluzione dinamica del sistema è quindi sufficiente assegnare, istante per istante,  $n$  valori, ovvero dare l'andamento nel tempo di  $n$  variabili: indicheremo con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  queste variabili e le definiremo **variabili di stato**.

Note le variabili di stato ad un dato istante e l'andamento degli ingressi da quell'istante in poi, sarà quindi possibile determinare l'andamento di tutte le uscite dall'istante considerato. La formalizzazione matematica del sistema dinamico passa allora per la scrittura delle equazioni differenziali di cui le variabili di stato sono le soluzioni, noti gli ingressi esterni, e del legame tra le variabili di uscita e quelle di stato e di ingresso.

Sia  $m$  il numero delle variabili di ingresso e  $p$  il numero di variabili di uscita:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))
 \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$

$$\left. \begin{aligned}
 y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 &\vdots \\
 y_p(t) &= g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))
 \end{aligned} \right\} \text{trasformazioni di uscita}$$

Queste sono le equazioni di un **sistema dinamico**.

Introduciamo i vettori:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

e le funzioni vettoriali:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

Possiamo riscrivere le equazioni del sistema dinamico in forma compatta vettoriale:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

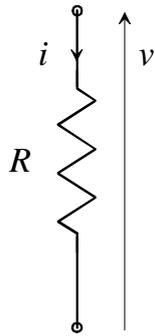
Si osservi che il sistema è *tempo invariante* ossia le equazioni del sistema non si modificano nel tempo: ciò comporta che la scelta dell'asse dei tempi è del tutto convenzionale, ossia che come istante iniziale sarà sempre possibile scegliere l'istante  $t=0$ .

Definiremo poi come sistemi *SISO* (Single Input Single Output) i sistemi per cui  $m=p=1$ , *MIMO* (Multiple Input Multiple Output) gli altri.

Infine si dirà *strettamente proprio* un sistema in cui la funzione  $\mathbf{g}$  non dipende dall'ingresso  $\mathbf{u}$ , genericamente proprio un sistema in cui ciò non accade.

Torniamo ai nostri esempi:

### Resistore



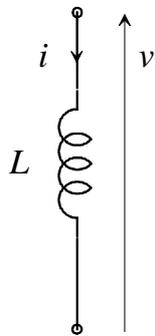
ingresso:  $u = v$

uscita:  $y = i$

variabili di stato: nessuna

$$y(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

### Induttore



ingresso:  $u = v$

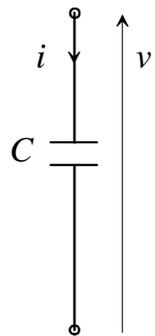
uscita:  $y = i$

variabili di stato:  $x_1 = i$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Condensatore



ingresso:  $u = i$

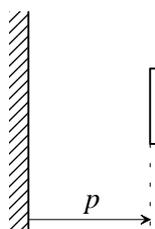
uscita:  $y = v$

variabili di stato:  $x_1 = v$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Massa



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

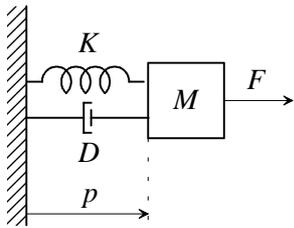
variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Oscillatore meccanico



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

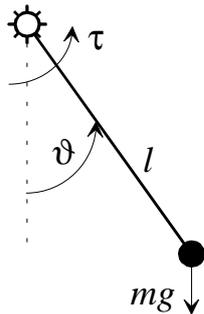
variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Pendolo



ingresso:  $u = \tau$

uscita:  $y = \vartheta$

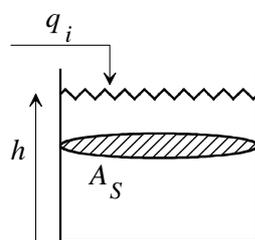
variabili di stato:  $x_1 = \vartheta, x_2 = \omega$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico



ingresso:  $u = q_i$

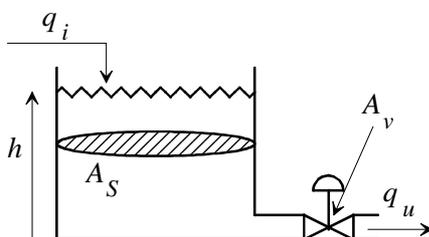
uscita:  $y = h$

variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



ingresso:  $u = q_i$

uscita:  $y = h$

variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = -k \frac{A_v}{A_S} \sqrt{x_1(t)} + \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Gli esempi evidenziano che, di norma, le variabili di stato sono associate a fenomeni di accumulo (di energia elettrica, di energia potenziale, di energia cinetica, di massa...).



## Movimento

In un sistema dinamico il movimento (o moto) dello stato è definito come l'evoluzione nel tempo del vettore delle variabili di stato, a partire da un istante iniziale in cui sia dato il valore dello stato stesso, e noti gli andamenti degli ingressi da quell'istante in poi. Analoga definizione si dà per il movimento dell'uscita. Di fatto quindi il movimento dello stato costituisce la soluzione del sistema di equazioni differenziali che forma il sistema dinamico.

Per un sistema dinamico **lineare**, il movimento dello stato e quello d'uscita sono scomponibili in due termini: moto libero e moto forzato. Il moto libero dipende solo dalla condizione iniziale sullo stato del sistema (e non dagli ingressi), il moto forzato dipende solo dagli ingressi (e non dalla condizione iniziale):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)$$

Considerando per semplicità un sistema del primo ordine ( $n = 1$ ), con un ingresso ed un'uscita ( $m = p = 1$ ):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

(in cui tutte le variabili sono quindi scalari) è facile verificare che il moto libero ed il moto forzato assumono le seguenti espressioni:

### Moto libero

$$x_l(t) = e^{at} x_0$$

$$y_l(t) = ce^{at} x_0$$

### Moto forzato

$$x_f(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$$x_f(t) = \int_0^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$$

Le formule possono essere generalizzate (“formula di Lagrange”) a sistemi di ordine superiore e con più ingressi e/o uscite, introducendo il concetto di esponenziale di matrice.

## Sovrapposizione degli effetti

Si consideri un sistema dinamico **lineare**.

Si eseguano sul sistema tre esperimenti:

1. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}'_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}'(t)$ , per  $t \geq 0$ .

Siano  $\mathbf{x}'(t)$  e  $\mathbf{y}'(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

2. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}''_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}''(t)$ , per  $t \geq 0$ .

Siano  $\mathbf{x}''(t)$  e  $\mathbf{y}''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

3. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}'''_0 = \alpha \mathbf{x}'_0 + \beta \mathbf{x}''_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}'''(t) = \alpha \mathbf{u}'(t) + \beta \mathbf{u}''(t)$ , per  $t \geq 0$ , essendo  $\alpha$  e  $\beta$  due arbitrari numeri reali.

Siano  $\mathbf{x}'''(t)$  e  $\mathbf{y}'''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

Il principio di sovrapposizione degli effetti, valido solo per sistemi **lineari**, afferma che:

$$\mathbf{x}'''(t) = \alpha \mathbf{x}'(t) + \beta \mathbf{x}''(t) ,$$

$$\mathbf{y}'''(t) = \alpha \mathbf{y}'(t) + \beta \mathbf{y}''(t) .$$

E' quindi possibile studiare separatamente l'effetto sul moto delle cause (stato iniziale e differenti ingressi) che lo generano, e quindi sovrapporre (combinare linearmente) gli effetti.

## Equilibrio

Si supponga che l'ingresso (o gli ingressi) del sistema dinamico (lineare o no) siano costanti. Un punto di equilibrio è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili di stato (e quindi anche la variabile di uscita) del sistema rimangono costanti nel tempo.

Consideriamo l'equazione di stato (vettoriale):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

ed assumiamo l'ingresso costante:  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ .

Se il sistema si trova all'equilibrio,  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ , e la derivata di  $\mathbf{x}$  è nulla. Pertanto:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Questa equazione, nell'incognita  $\bar{\mathbf{x}}$ , consente di trovare il punto di equilibrio del sistema. La corrispondente *uscita di equilibrio* sarà data da:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}).$$

Non è detto che lo stato di equilibrio esista e, se esiste, non è detto che sia unico.

### Esempio

Si consideri il sistema, non lineare, del secondo ordine:

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{u}$$

Si vogliono individuare eventuali punti di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{u} = 1$ .

Annullando le derivate si ottiene:

$$\bar{x}_1^3 + 1 = 0$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 = 0$$

Dalla prima equazione si ricava, come unica soluzione reale,  $\bar{x}_1 = -1$ , che, sostituita nella seconda, comporta le due soluzioni:  $\bar{x}_2 = -1$  e  $\bar{x}_2 = 1$ .

Pertanto il sistema soggetto all'ingresso costante assegnato ammette due punti di equilibrio:

$$(\bar{x}_1 = -1; \bar{x}_2 = -1), (\bar{x}_1 = -1; \bar{x}_2 = 1).$$

In corrispondenza del primo punto di equilibrio l'uscita di equilibrio vale:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 2$$

mentre in corrispondenza del secondo:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 0.$$

## Linearizzazione

Considerando *piccoli scostamenti* delle variabili attorno a valori di equilibrio, è possibile approssimare il comportamento di un sistema dinamico non lineare con quello di un sistema dinamico lineare.

Consideriamo un generico sistema non lineare in forma vettoriale:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

soggetto all'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ . Supponiamo che esista il punto di equilibrio (eventualmente non unico) caratterizzato dal valore  $\bar{\mathbf{x}}$  delle variabili di stato e dal valore  $\bar{\mathbf{y}}$  dell'uscita di equilibrio.

Per definizione di equilibrio sarà quindi:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}).$$

Si supponga ora che lo stato iniziale (all'istante  $t=0$ ) sia costituito dal valore di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  cui si somma un piccolo scostamento:

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}_0,$$

e che, a partire dall'istante iniziale, l'ingresso si possa esprimere come la somma del valore all'equilibrio e di un piccolo scostamento:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0.$$

E' senz'altro lecito esprimere anche i movimenti di stato e uscita che ne conseguono come somma dei valori di equilibrio e di scostamenti:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}} + \delta\mathbf{y}(t).$$

Essendo le espressioni precedenti movimenti del sistema devono soddisfarne le equazioni. Si ottiene quindi:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t))$$

$$\delta\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}_0$$

$$\bar{\mathbf{y}} + \delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t))$$

Il **sistema linearizzato** si ottiene sviluppando in serie di Taylor intorno al punto di equilibrio le equazioni di stato e le trasformazioni di uscita del sistema originario ed arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado. Nello sviluppo compariranno le derivate parziali delle funzioni vettoriali  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  rispetto agli argomenti vettoriali  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  (matrici Jacobiane), valutate nel punto di equilibrio:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{u}(t)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$$

$$\bar{\mathbf{y}} + \delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{u}(t)$$

Ponendo ora:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}},$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}},$$

e ricordando le relazioni valide tra le variabili che caratterizzano l'equilibrio, otteniamo:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}(t)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$$

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t),$$

che è un sistema lineare.

Per il sistema linearizzato valgono quindi le proprietà dei sistemi lineari (non valide per il sistema non lineare di partenza), limitatamente a piccole variazioni intorno alla condizione di equilibrio.

### **Esempio**

Si consideri nuovamente il sistema del secondo ordine:

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{u}$$

Si vogliono determinare le espressioni dei sistemi linearizzati intorno ai due punti di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante  $u(t) = \bar{u} = 1$ .

Abbiamo già calcolato i due punti di equilibrio:

$$(\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = -1), (\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = 1).$$

Le equazioni del sistema linearizzato sono le seguenti:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\bar{x}_1^2\delta x_1 + \delta u$$

$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\bar{x}_2\delta x_2 \quad .$$

$$\delta y = \bar{x}_2\delta x_1 + \bar{x}_1\delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \delta u$$

In particolare, il sistema linearizzato intorno al primo punto di equilibrio risulta:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 - 2\delta x_2 \quad ,$$

$$\delta y = -\delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2} \delta u$$

mentre quello linearizzato intorno al secondo punto:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

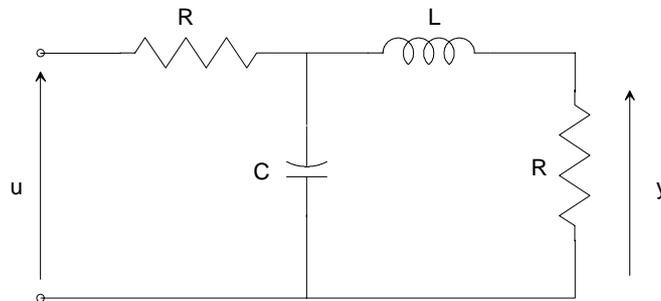
$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\delta x_2 \quad .$$

$$\delta y = \delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2} \delta u$$

## Esercizi

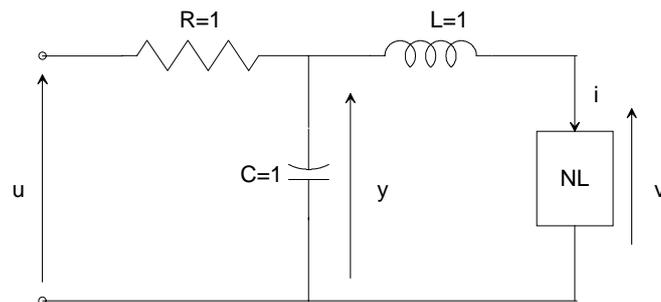
### Esercizio 2.1

Scrivere le equazioni che descrivono (nel dominio del tempo) il comportamento dinamico della rete elettrica di figura:



### Esercizio 2.2

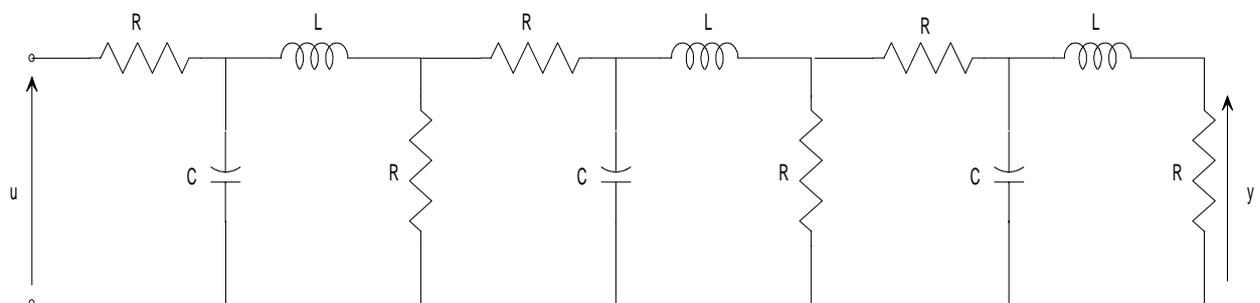
Scrivere le equazioni che descrivono (nel dominio del tempo) il comportamento dinamico della rete elettrica di figura:



dove il blocco  $NL$  impone la relazione  $v = i^3$  tra la corrente  $i$  che lo percorre e la tensione  $v$  ai suoi capi.

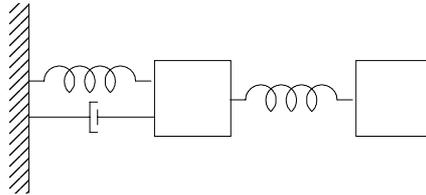
### Esercizio 2.3

Senza scriverne le equazioni, si dica di che ordine è il sistema dinamico che descrive la rete elettrica di figura:



### **Esercizio 2.4**

Senza scriverne le equazioni, si dica di che ordine è il sistema dinamico che descrive il sistema meccanico di figura:



### **Esercizio 2.5**

Con riferimento al sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

si calcoli il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante  $u = \bar{u} = 2$ , e si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale punto di equilibrio.

### **Esercizio 2.6**

Con riferimento al sistema dinamico:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t) - 1}{u(t)}$$

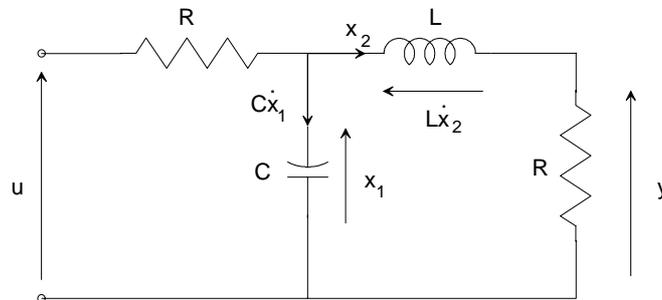
$$y(t) = x(t)$$

si calcoli il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante  $u = \bar{u} = 1$ , e si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale punto di equilibrio.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 2.1

Dette  $x_1$  la tensione sul condensatore e  $x_2$  la corrente nell'induttore:



si scrivono le leggi delle tensioni alle due maglie:

$$x_1 = L\dot{x}_2 + Rx_2$$

$$u = x_1 + R(x_2 + C\dot{x}_1)$$

da cui si ricavano le equazioni del sistema dinamico:

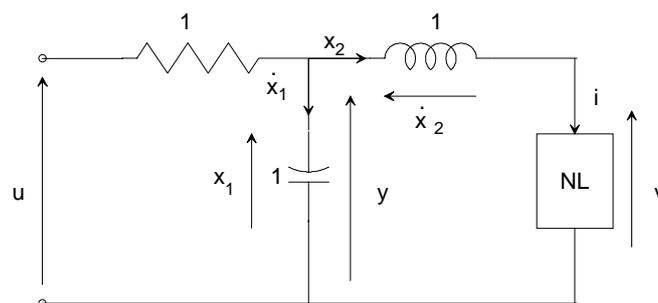
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{RC}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

$$y = Rx_2$$

### Esercizio 2.2

Dette  $x_1$  la tensione sul condensatore e  $x_2$  la corrente nell'induttore:



si scrivono le leggi delle tensioni alle due maglie:

$$x_1 = \dot{x}_2 + x_2^3$$

$$u = x_1 + (x_2 + \dot{x}_1)$$

da cui si ricavano le equazioni del sistema dinamico:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$$

$$y = x_1$$

### ***Esercizio 2.3***

Poiché sono presenti 6 elementi di accumulo di energia (condensatori ed induttori), il sistema è di ordine 6.

### ***Esercizio 2.4***

Poiché sono presenti 2 masse (ciascuna delle quali costituisce un sistema del secondo ordine) il sistema è di ordine 4.

### ***Esercizio 2.5***

Annullando le derivate e ponendo  $u = \bar{u} = 2$ , si ottiene:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = -2,$$

da cui seguono le equazioni del sistema linearizzato:

$$\delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) + \delta u(t)$$

$$\delta\dot{x}_2(t) = \delta x_1(t)$$

$$\delta y(t) = -2\delta x_1(t)$$

### ***Esercizio 2.6***

Annullando la derivata e ponendo  $u = \bar{u} = 1$ , si ottiene:

$$\bar{x} = 1,$$

da cui seguono le equazioni del sistema linearizzato:

$$\delta\dot{x}(t) = \delta x(t)$$

$$\delta y(t) = \delta x(t)$$